

مجموعة الفصل الثانية T_2

هذه المجموعة من أجل أي نقطتين مختلفتين x, y من فضاء هوبارد هي
لا يوجد جوار (x, y) وجوار (y, x) وهذه الجواران
لا يتقاطعان.

$$U \cap V = \emptyset$$

أي أن:
إن الفضاء الذي يحقق هذه المجموعة يسمى T_2 أو
«فضاء هاوسدورف».

والجواب عن التعريف أن مجموعة الفصل الأولى تنتج من الثانية.
أي أن «كلا T_1 و T_2 فضاء هو T_1 فضاء»
ولكن العكس غير صحيح.

مثال:

لنأخذ فضاء المتغيرات المنتهية (X, τ) حيث X مجموعة غير منتهية.
المجموعات المفتوحة في هذا الفضاء هي المجموعات التي تتكون من
منتهية بالإضافة إلى \emptyset .
وتكون المجموعات المغلقة هي المجموعات المنتهية بالإضافة إلى X .
هذا الفضاء هو T_1 فضاء، لكنه من أجل أي نقطتين مختلفتين
 x, y يكون:

$\{x\} \cup \{y\}$ مفتوحة من جوار x لا يحتوي y (لا يحتوي x)

$\{x\} \cup \{y\}$ مفتوحة من جوار y لا يحتوي x (لا يحتوي y)

المجموعة $\{x\}$ هي مجموعة مغلقة لأنها منتهية.

ولكن ليس T_2 فضاء لأنه سبق وبرهنا أن:

«أي مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين في هذا الفضاء يتقاطعان»
هذا يعني أن أي جوارين لأي نقطتين يتقاطعان.

مثال :

أي فضاء مترى هو T_2 فضاء.

الحل :

نفرض (X, d) فضاء مترى و x, y نقطتين مختلفتين حيث $x \neq y$ ، عندها

$$d(x, y) = r > 0$$

عندها يكون $B(x, \frac{r}{2})$ جوار لـ x

و $B(y, \frac{r}{2})$ جوار لـ y

وهذان الجواران لا يتقاطعان أي أنه T_2 فضاء.

ملاحظة :

يبرهن أن الفضاء X يكون فضاء هاريسروف إذا كان تقاطع جميع الجارات المنغلقة للنقطة x يطابق المجموعة X نفسه شرطاً آخر مكافئ له فبال البرهان التالية :

مبرهنة :

ليكن X فضاء طوبولوجياً ، الشرط اللزوم والكافي ليكون X فضاء هاريسروف هو أن تكون المجموعة :

$$\Delta = \{ (x, x) \mid x \in X \}$$

مجموعة منغلقة في فضاء الجوار « $X^2 = X \times X$ »

البرهان :

« لزوم الشرط »

نفرض أن X فضاء هاريسروف ونثبت أن Δ مجموعة منغلقة
عبر تعريف انضبات أن متمم مجموعة

لناخذ نقطة « $(x, y) \in X^2 \setminus \Delta$ » هذا يعني أن $x \neq y$

وبما أن الفضاء هو T_2 إذاً يوجد جوار مفتوح U لـ x

$U \cap V = \emptyset$ حيث U و V مجموعتان مفتوحتان في الفضاء X ،
 إن المجموعة $U \times V$ هي عنصر من عناصر طوبولوجيا الجوار
 أي أن مجموعة مفتوحة في فضاء الجوار تحتوي النقطة (x, y)
 أي أن:

$$U \times V \cap \Delta = \emptyset$$

ومنه $U \times V$ موجودة في المنطقة أي أن:
 $(x, y) \in U \times V \subseteq X^2 \setminus \Delta$ ← داخلية
 وبما أن كل نقطة في $X^2 \setminus \Delta$ داخلية
 أي أن $X^2 \setminus \Delta$ مفتوحة ← Δ مغلقة

كفاية الشرط

نقره أن Δ مجموعة مغلقة ولشئ أن الفضاء هامسوف
 نأخذ نقطتين مختلفتين $x \neq y$ حيث $x \neq y$
 هذا يعني أن $(x, y) \notin \Delta$ هذا يعني أن $(x, y) \in X^2 \setminus \Delta$
 ولذا $X^2 \setminus \Delta$ مجموعة مفتوحة لأن Δ مغلقة.

دعنا نوجد مجموعة مفتوحة ابتدائية بهذا الشكل:
 $U \times V$ حيث النقطة (x, y) تنتمي إلى $U \times V$ أي أن:

$$(x, y) \in U \times V \subseteq X^2 \setminus \Delta$$

من هنا يتبع أن U و V مجموعتان
 مفتوحتان في X هذا يعني أنه:

$$U \cap V = \emptyset$$

هذا يعني أن الفضاء يحقق أن الفضاء T_2 .

مبرهنة:

ليكن: $f, g: X \rightarrow Y$ تمليان مستريرين
 إذا كان Y فضاء هامسوف فإن المجموعة A

$$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

مطلقة في X .

« إذا تبادلت المكانين مترين على مجموعة ما فإن هذه المجموعة مطلقة تماماً »

البرهان :

$$\gamma : X \rightarrow Y^2 = Y \times Y \quad \text{نبي تطبيقاً جدياً}$$

$$\gamma : x \rightarrow (f(x), g(x))$$

إن التقييد γ لا متر استناداً إلى مبينة سابقة مع ملاحظة أن تطبيق الإسقاط

$$\left. \begin{array}{l} P_1 \circ \gamma = f \\ P_2 \circ \gamma = g \end{array} \right\} \text{ لا متر}$$

ومما لا مريضا مضاه هادسون فإن المجموعة Δ

$$\Delta = \{(y, y) : y \in Y\}$$

هي مجموعة مطلقة في (Y^2)

ومما أن Δ مطلقة ولا متر فإن الصورة العكسية Δ^{-1}

مقت Δ تكون مجموعة مطلقة أي أن $(\Delta^{-1} \circ \gamma)$ مطلقة

ومكن $(\Delta^{-1} \circ \gamma)$ هي مجموعة النقاط التي يتباد على صورة x أي

$$f(x) = g(x) \leftarrow \text{فهذه المجموعة } A \text{ فهي مطلقة.}$$

نتيجة :

إذا كان لدينا تطبيقان مترين من فضاء X إلى فضاء هادسون

و إذا تبادلت هذا التطبيقين على مجموعة كثيفة من X

فإنهما يتطابقان على X .

« ربيست مبدأ تمديد المطابقات »

ملحظة:

إنّ الفضاءات T_0, T_1, T_2 تمثل فضاءات متجهة
 مستمرة أحادي وثنائي محققاً بالسر
 حيث $(i, 0, 1, 2, \dots)$

مبرهنة:

ليكن X فضاء متجهياً، إنّ الدالتين التاليتين متكافئتان:

1- X هو T_1 فضاء

2- يوجد نقطة متر f حيث: f نقطة x مستمرة

T_1 فضاء محقق، خاصة « $f(x) \neq f(y)$ »

مما جعل أي نقطتين مختلفتين x و y

(حيث الدالت f نقطة x و y قد تغيرت بتغيرها)

البرهان:

(1 \leftarrow 2)

إنّ الدالت المتطابق $I: X \rightarrow X$ يحقق كل الشروط المطلوبة.

(2 \leftarrow 1)

مما جعل أي نقطتين x, y بحيث $f(x) \neq f(y)$ لانه متباين

إذا كان H جواراً لـ $f(x)$ في المستمر لا يحوي $f(y)$

فإن $f^{-1}(H)$ جوار لـ x لا يحوي y

إذا كان H جوار لـ $f(x)$ في المستمر لا يحوي $f(y)$

و g جواراً لـ $f(y)$ في المستمر لا يحوي $f(x)$

فإن $f^{-1}(H)$ جوار لـ x لا يحوي y

$f^{-1}(g)$ جوار لـ y لا يحوي x

وأخيراً، إذا كان H و g جوارين للنقطين $f(x)$ و $f(y)$

غير متقاطعتين فإن $f^{-1}(H)$ و $f^{-1}(g)$ جوارين لـ x و y

غير متقاطعتين.

نتائج :

1- إن كون الفضاء الطوبولوجي X هو T_i -فضاء ($i=0,1,2,\dots$) هي صفة طوبولوجية له.
 بمعنى أنه إذا كان الفضاءان X_1 و X_2 متكافئين أي (شبهاً هوميو مورفزم) وإذا كان أحدهما T_i -فضاء فإن الآخر يكون T_i -فضاء.

2- كون الفضاء T_i -فضاء هي صفة وراثية له.
 بمعنى :

مبرهنة :

إذا كان X هو T_i -فضاء فإن أي فضاء جزئي منه A يكون أيضاً T_i -فضاء.

البرهان :

لأخذ تطبيق الإدخال : $I_A: A \rightarrow X$ هو متطوّر تطبيق المطابقة : $I_A(x) = x$

هذا التطبيق متباين وصغر، متفرع T_i -فضاء وبالتالي استناداً إلى المبرهنة \Rightarrow أن A هو T_i -فضاء.